2 ÁLGEBRA DE MATRICES

Página 49

REFLEXIONA Y RESUELVE

Elección de presidente

- **Ayudándote de la tabla, estudia detalladamente los resultados de la votación, analiza algunas características de los participantes y opina quién crees que debería ser presidente.**

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \;A & \;\;B & \;\;C & \;\;D & \;\;E & \;\;F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De la tabla podemos deducir muchas cosas:

— Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.

— B solo tiene un candidato (el C).

— Dos consejeros (C y E) están de acuerdo en los mismos candidatos (B, C y D).

— El consejero F no opta por ninguno de sus compañeros.

— Al candidato E no le prefiere ninguno de los otros consejeros. De hecho, es el único que no se considera idóneo para el cargo.

— Los candidatos B y D han obtenido los mismos resultados.

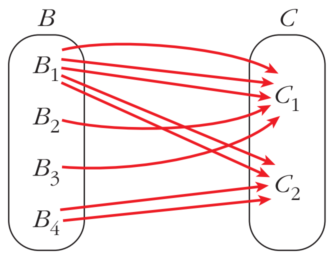
— Solo A y C se consideran idóneos para el puesto de presidente.

— …

Según los resultados, el candidato C es el más idóneo para presidir la empresa (por lo menos eso piensan sus compañeros del consejo).

Vuelos internacionales

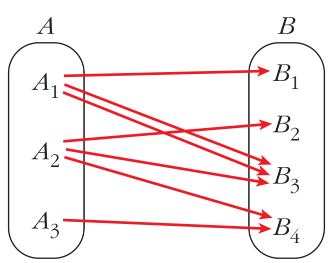
- **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país B hasta el país C. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

Conexiones de vuelos

- **Supón que una persona quiere salir el lunes de A, pasar la noche en B y llegar el martes a C.**



¿Cuántas posibles combinaciones tiene por cada punto de salida y cada punto de llegada? Es decir, ¿de cuántas formas puede ir de A_1 a C_1, de A_1 a C_2, de A_2 a C_1, etc.?

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	**5**	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 51

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

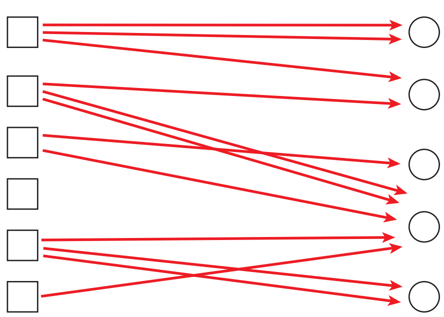
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 52

1. Sean las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $\boldsymbol{E = 2A - 3B + C - 2D}$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 55

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Intenta conseguir una matriz $\boldsymbol{I_3}$ de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada $\boldsymbol{A(3 \times 3)}$, la deje igual.

Es decir: $\boldsymbol{A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A}$

La matriz $\boldsymbol{I_3}$ que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 56

1. Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$a = 3, \ b = 6 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD 2

$$\left.\begin{array}{l} 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

PROPIEDAD 3

$$\left.\begin{array}{l} 3(A + B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

Página 57

2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l} (B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Página 59

1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)-(2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)-3\cdot(1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)+(2.^a)}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1/2)\cdot(2.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)+2\cdot(1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 2.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-4\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-7\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 3.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) - (1.^{a})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) - 3 \cdot (3.^{a}) \\ (2.^{a}) - 2 \cdot (3.^{a}) \\ (3.^{a})}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) - 2 \cdot (2.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) \\ (2.^{a}) - (1.^{a}) \\ (3.^{a}) - 2 \cdot (1.^{a})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) + 2 \cdot (2.^{a})}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) \\ -5 \cdot (2.^{a}) + (3.^{a}) \\ -(1/10) \cdot (3.^{a})}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) - 3 \cdot (3.^{a}) \\ -(1/5) \cdot (2.^{a}) \\ (3.^{a})}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) - (2.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

Página 61

3. Calcula x, y, z, t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x - z = 5 & x = \dfrac{5}{2} \\[2ex] 2y - t = 1 & y = \dfrac{3}{2} \\[2ex] z = 0 & z = 0 \\[1ex] t = 2 & t = 2 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. **Para las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

5. **Sean** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. **Encuentra** X **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

6. **Encuentra dos matrices,** A **y** B, **de dimensión** 2×2 **que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. **Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Sumando: $-Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

8. **Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla la siguiente condición:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x + z \\ x + y &= y + t \\ z &= z \\ z + t &= t \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= t \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

9. **Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})$

b) $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$

c) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

10. **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, comprueba que** $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{0}$**.**

$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. **Halla la inversa de estas matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1, \; b = 0, \; c = 0, \; 2d = 0, \; 2e = 1, \; 2f = 0, \; g = 0, \; h = 0, \; i = 1$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} a + 2d + 3g & b + 2e + 3h & c + 2f + 3i \\ d + 2g & e + 2h & f + 2i \\ d + g & e + h & f + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned} a + 2d + 3g &= 1 \\ d + 2g &= 0 \\ d + g &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= 1 \\ d &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} b + 2e + 3h &= 0 \\ e + 2h &= 1 \\ e + h &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} b &= -1 \\ e &= -1 \\ h &= 1 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} c + 2f + 3i &= 0 \\ f + 2i &= 0 \\ f + i &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c &= -1 \\ f &= 2 \\ g &= -1 \end{aligned}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Página 62

1. Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}$.

Comprueba las ocho propiedades que se enumeran arriba.

- *Asociativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Conmutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nulo*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector opuesto*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Asociativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = (8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producto por 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Página 64

Comprueba si los siguientes conjuntos de *n*-uplas son L.I. o L.D.

2. (3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (4, –2, 0, –5)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(4, -2, 0, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y + 4w, -y - 2w, x + 5y + z, z - 5w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} 3x & + 2y & & + 4w & = 0 \\ & -y & & - 2w & = 0 \\ x & + 5y & + z & & = 0 \\ & & z & - 5w & = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

3. (3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y, -y, x + 5y + z, z + w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \qquad\quad = 0 \\ -y \qquad\quad = 0 \\ x + 5y + z \qquad = 0 \\ z + w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

4. **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(2x + y, -4x + z, 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & & & = 0 \\ -4x & & & + & z & = 0 \\ 7x & + & 2y & + & 2z & = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5. **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

- Aplicamos la propiedad fundamental:

  $$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

  Si hacemos $x = 0$, $y = 0$, z puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

- Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

  $$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

  en la que $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

Página 66

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\ (A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\ (B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{subarray}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\ (C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - 4 \cdot (2.^a) \end{subarray}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{ran}\ (D) = 3$$

Página 67

ESTILO MATEMÁTICO

1. Demuestra que los vectores (7, 2, –1, 0), (0, 4, 0, 5), (0, 0, –2, 0) son L.I.

$$\alpha(7, 2, -1, 0) + \beta(0, 4, 0, 5) + \gamma(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

La primera coordenada es $7\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 0$

La igualdad queda: $\beta(0, 4, 0, 5) + \gamma(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$

La segunda coordenada es $4\beta + 0\gamma = 0 \;\rightarrow\; \beta = 0$

La igualdad queda: $\gamma(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$

La tercera coordenada es $-2\gamma = 0 \;\rightarrow\; \gamma = 0$

Como $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, los vectores son L.I.

Página 72

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

4 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 **Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

8 **Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ verifica $(A + I)^2 = 6I$.**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \to A + I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$$

Luego $(A + I)^2 = 6I$

9 **Dada la matriz:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

comprueba que $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^2 = \mathbf{0}$ y expresa $\boldsymbol{A}^2$ como combinación lineal de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$(A + I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow$

$\rightarrow A^2 = -2A - I$

Ecuaciones con matrices

s10 **Halla las matrices $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ que verifican el sistema:**

$$\mathbf{2}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2.ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

s11 **Calcula $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, siendo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

s12 **Determina los valores de *m* para los cuales** $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ **verifique:**

$$\boldsymbol{X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0}$$

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2m^2 - 5m + 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \dfrac{1}{2}$

s13 **Resuelve:**

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - \;\; y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando:

$$4x = -5 \;\rightarrow\; x = \frac{-5}{4} \;\rightarrow\; y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$$

Solución: $x = \dfrac{-5}{4}$; $y = \dfrac{-7}{4}$

s14 **Halla dos matrices *A* y *B* tales que:**

$$\mathbf{2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{-A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix}$$ Multiplicamos por 2 la 2.ª ecuación.

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix}$$ Sumamos miembro a miembro.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ Multiplicamos por $\frac{1}{13}$.

Despejamos A en la 2.ª ecuación:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

15 **Dadas las matrices:**

$$\mathbf{M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

halla dos matrices *X* e *Y* que verifiquen:

$$\mathbf{X - 2M = 3N; \quad M + N - Y = I}$$

$$X = 3N + 2M = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

16 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

17 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:**

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. M no es inversa de A.

$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. N es la inversa de A.

18 **Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

$|C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Página 73

Rango de una matriz

19 **Estudia el rango de las matrices siguientes:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \to ran\ (A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 12 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (C) = 1$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (3.^a) - 9 \cdot (2.^a)}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (D) = 2$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to ran\ (E) = 3$

$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (F) = 3$

s20 **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a)}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \to ran\ (A) = 3$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\\(4.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-3\cdot(1.^a)\end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\\(4.^a)-(2.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to ran\,(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

PARA RESOLVER

s21 Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

s22 **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, halla una matriz** $\boldsymbol{B}$ **tal que** $\boldsymbol{A \cdot B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$**.**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \dfrac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

s23 **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$**, prueba que** $\boldsymbol{A^3}$ **es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $\boldsymbol{I + A + A^2}$ **es la matriz inversa de** $\boldsymbol{I - A}$**.**

☛ ***Multiplica*** $\boldsymbol{I + A + A^2}$ ***por*** $\boldsymbol{I - A}$**.**

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)\,(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

s24 **Calcula** $\boldsymbol{A^n}$ **y** $\boldsymbol{B^n}$ **siendo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1/7} & \mathbf{1/7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n-1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n-1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

s25 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \dots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

26 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k = 1$$

27 **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son** $\vec{u}_1$ **y** $\vec{u}_2$**.**

b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ **y** $\vec{v}_3$**.**

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(1.^a) \\ (4.^a)-7\cdot(1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & -6 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ 6\cdot(2.^a)+7\cdot(3.^a) \\ 10\cdot(2.^a)+7\cdot(4.^a)}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 2$

Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-4\cdot(1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a)}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 2$

El conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es linealmente dependiente. Hay dos vectores linealmente independientes.

28 **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores de** t**:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

a) Debemos estudiar el rango de la matriz:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & t-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & t+6 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 3$ para cualquier valor de t

Los tres vectores son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de t.

b) Hallamos el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a):2 \\ (2.^a) \\ (4.^a):2 \\ (3.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a):3 \\ (3.^a):2 \\ (4.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \\ (4.^a)-(2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $t = 1$, $ran\ (M) = 2 \rightarrow$ Hay dos vectores linealmente independientes.
- Si $t \neq 1$, $ran\ (M) = 3 \rightarrow$ Hay tres vectores linealmente independientes.

s29 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$ran\ (M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ 2\cdot(3.^a)-(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- Si $k = -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- Si $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (3.^a):4 \\ (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = -2 \rightarrow ran\ (P) = 1$
- Si $k \neq -2 \rightarrow ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 2 \rightarrow ran\ (Q) = 2$
- Si $k \neq 2 \rightarrow ran\ (Q) = 3$

s30 **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes.**

Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$; $\begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

Página 74

s31 **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O).**

De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

s32 **Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b^2 = 1 \\ b+c=0 \\ c^2=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \;\to\; b = -1 \;\to\; c = 1 \\ a = -1 \;\to\; b = 1 \;\to\; c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

s33 **Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

s34 **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \quad a = b = c$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

s35 Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta. Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Haz $A \cdot A^t = I$.***

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & (3/5)y - (3/5)x & 0 \\ (3/5)y - (3/5)x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{9}{25}+x^2=1\\[2ex] \dfrac{3}{5}y-\dfrac{3}{5}x=0\\[2ex] y^2+\dfrac{9}{25}=1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x^2=\dfrac{16}{25}\\[2ex] y=x\\[2ex] y^2=\dfrac{16}{25}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{4}{5}\\[2ex] y=x\end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\frac{4}{5},\ y_1=\frac{4}{5};\quad x_2=-\frac{4}{5},\ y_2=-\frac{4}{5}$

s36 **Resuelve la siguiente ecuación matricial:**

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 22 & 14\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1/2 & -2\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 22 & 14\end{pmatrix}\ \rightarrow\ X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 4\\ 22 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1/2 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1/2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ -1 & -8\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ -1 & -8\end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

s37 **Justifica por qué no es cierta la igualdad:**

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB=BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

s38 **Sea A una matriz de dimensión 2×3:**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A\cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B\cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

s39 **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

s40 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

☛ ***Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.***

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

s41 **Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?**

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, A seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, A seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguirá siendo 2.

s42 **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango 2.

b) No. Podría ser 2 ó 1. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la 1.ª fila y la 3.ª columna, queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1 ($A$ tenía rango 3).

43 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal).**

Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que también es una matriz diagonal.

s44 **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como:**

$$tr\,(A) = a_{11} + a_{22}$$

Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces:

$$tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \; tr\,(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \; tr\,(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$

Por tanto, $tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$.

Página 75

PARA PROFUNDIZAR

45 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.**

De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que:

$$A \cdot B = A \cdot C, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ pero } B \neq C.$$

b) Debe existir A^{-1}.

s46 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \;\rightarrow\; 3a - 2b + c = 0 \;\rightarrow \\ \rightarrow\; c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

s47 **Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si su inversa, A^{-1}, coincide con su traspuesta, A^t, ha de tenerse que $A \cdot A^t = I$. Es decir:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array}\right\} \text{Por ejemplo, obtenemos, entre otras: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

s48 **a) Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica ($A^t = -A$).**

b) Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son ceros. Demuéstralo.

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \\ \\ d = 0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

b) • Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, los elementos de su diagonal principal son a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

• La traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal también serán a_{ii} (los mismos que los de A).

• La opuesta de la traspuesta es $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal serán $-a_{ii}$.

• Para que $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; por tanto, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (es decir, los elementos de la diagonal principal son ceros).

49 **Una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k.**

¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una *matriz antisimétrica*, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es *antisimétrica*, $k = 0$.

- Buscamos las matrices *mágicas antisimétricas de orden 3*: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

  Veamos cómo es una *matriz antisimétrica de orden 3*:

  $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ } \textit{antisimétrica} \text{ si } A^t = -A; \text{ es decir:}$$

  $$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

  Luego, una matriz *antisimétrica de orden 3* es de la forma:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

  Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que:

  $$\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}, \text{ es decir: } \begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$$

  Por tanto, las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

50 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.**

Una *matriz simétrica de orden 3* es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ (pues } A = A^t\text{). Para que sea mágica con } k = 0, \text{ ha de ser:}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ b + d + e = 0 \\ c + e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) : 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{lll} a + b + c = 0 & \to & a = -b - c = -f \\ b + d + e = 0 & \to & b = -e = f \\ c + e + f = 0 & \to & c = 0 \\ d + e + f = 0 & \to & e = -f \\ 3d = 0 & \to & d = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 0$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}.$$

51 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.**

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Para que sea *mágica* con $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c \qquad\qquad = 3 \\ \quad b \quad + d + e \quad = 3 \\ \qquad c \quad + e + f = 3 \\ a \qquad + d \quad + f = 3 \\ \quad 2c + d \qquad\quad = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) : 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{lll} a + b + c \qquad\qquad = 3 & \rightarrow & a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ \quad b \quad + d + e \quad = 3 & \rightarrow & b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ \qquad c \quad + e + f = 3 & \rightarrow & c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ \qquad\quad d + e + f = 3 & \rightarrow & e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ \qquad 3d \qquad\quad = 3 & \rightarrow & d = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 3$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Página 75

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula la matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ 3P = 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ 2I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ M = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Calcula las matrices A y B que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ los dos miembros de la segunda ecuación y sumamos después las dos ecuaciones:

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B + (A - B) = 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Despejamos B en la primera ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \ \ -2 \ \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $X \cdot A = B \;\to\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\to\; X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

4. **Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \;\to\; \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \;\to\; \begin{cases} 4-a=2 & \to \;\; a = 2 \\ -2-b=-1 & \to \;\; b=-1 \\ 2a+ab=a & \to \;\; 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \to \;\; -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

5. **Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a)}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\,(A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

6. **Razona si es posible añadir una fila a la matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

7. **Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 12 + 2 & 22a - 24a + 2a \\ 0 & 1 - 12 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

8. **La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:**

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C.

¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos.

¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamemos $(x \;\; y \;\; z \;\; t)$ a las cantidades de cada uno de los productos P, Q, R y S que intervienen en la dieta.

Para que la dieta tenga las cantidades de vitaminas requeridas, debe cumplirse la siguiente igualdad:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ (x \;\; y \;\; z \;\; t) \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ (20 \;\; 25 \;\; 6) \end{array}$$

Multiplicando e igualando las matrices llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + z + t = 25 \\ 2y + t = 6 \end{cases}$$

Mediante el método de Gauss podemos comprobar que el sistema es *compatible indeterminado*.

Por ello, pueden elaborarse infinitas dietas de los productos P, Q, R, S con las vitaminas exigidas.

b) Resolvemos el sistema en función de y (cantidad de producto Q que interviene en la dieta).

Hacemos $y = \lambda$ y obtenemos las soluciones $(8 + \lambda, \ \lambda, \ 3, \ 6 - 2\lambda)$, que nos indican la cantidad de P, Q, R y S que forman cada una de las posibles dietas.

Para que estas cantidades no sean negativas, λ debe variar entre 0 y 3. Es decir: $0 < \lambda < 3$